

Markering van de declinatielijnen op een scaphezonnwijzer

Een stenen holle sferische zonnwijzer maken was onlangs het gespreksonderwerp tussen steenkappers, in de zin van "Ik zou dat wel eens willen maken maar ik weet niet hoe" en "Het lijkt eenvoudig maar dat is het niet".

Zelf was ik niet vertrouwd met dit soort zonnwijzer, totdat ik een recent artikel van Ortwin Feustel¹ over dit onderwerp onder de ogen kreeg.

Het onderwerp kwam ook aan de orde tijdens een recente bestuursvergadering van de Zonnwijzerkring Vlaanderen, waarna Willy Leenders² me via e-mail zeven foto's bezorgde van het werk van de Nederlandse kunstenaar Jelle Andriess³. De foto's gaven een overzicht van de werkzaamheden om uit steen een holle sferische zonnwijzer te kappen. In fig. 1 zien we de foto van de afgewerkte stenen zonnwijzer, enkel met datumlijnen maar zonder uurlijnen, wat de kunstenaar heel bewust heeft gedaan omdat hij dit qua vormgeving mooier vond. De zonnwijzer is geplaatst in de tuin van het ontmoetingscentrum vlakbij de kerk van Enspijk (NL).

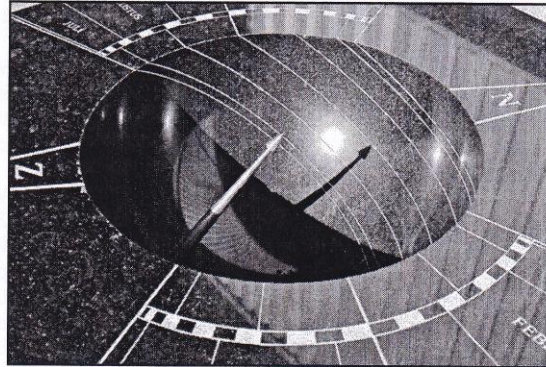


Fig. 1: Holle stenen sferische zonnwijzer (© Jelle Andriess).

Om lijnen op een gebogen oppervlak aan te brengen gebruikt een steenkapper doorgaans een zg. stencil (doordrukpapier, vroeger veelvuldig gebruikt in kantoren), wat een blauwe afdruk geeft op het te bewerken stenen oppervlak. Voor de scaphezonnwijzer met zijn half hol-bolvormig oppervlak is een nauwkeurige afdruk van de declinatie- of datumlijnen met deze stencilmethode niet mogelijk. De specifieke eigenschappen van de declinatielijnen voor dit type zonnwijzer zijn hier onderzocht en dit leidde tot een eenvoudige methode om een nauwkeurige stencil te maken.

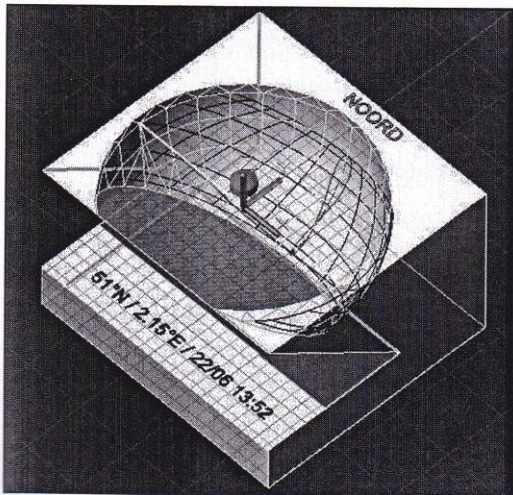


Fig. 2: Zuidoostelijk zijaanzicht van een scaphezonnwijzer

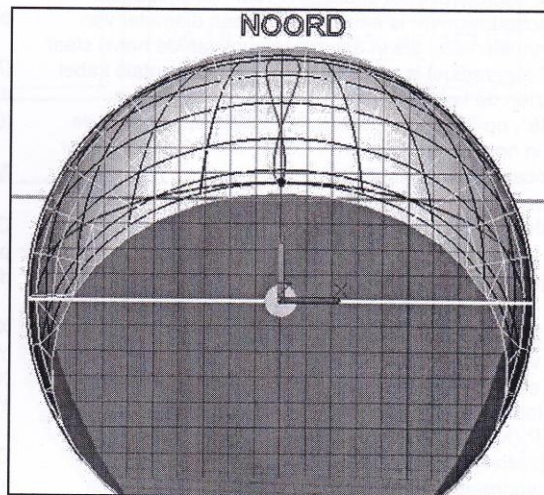


Fig. 3: Bovenaanzicht van een scaphezonnwijzer

Formules

De declinatie- en zonnetijdlijn van de scaphezonnewijzer is opgebouwd uit een reeks punten met ruimtelijke coördinaten $P(X, Y, Z)$ behorende tot het oppervlak van een holle halve sfeer met radius R . De vergelijkingen voor deze coördinaten zijn

$$\begin{aligned} X &= R \cdot \cos(h) \cdot \sin(Az) \\ Y &= R \cdot \cos(h) \cdot \cos(Az) \\ Z &= -R \cdot \sin(h) \\ \text{en voldoen aan} \\ (X^2 + Y^2 + Z^2) &= R^2. \end{aligned} \quad [1]$$

In bovenstaande vergelijkingen worden de zonhoogte h en het azimut Az uitgedrukt in functie van de zonnetijd T en zonsdeclinatie δ :

$$\begin{aligned} X &= R \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(H); \\ Y &= R \cdot [\sin(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\delta)] \\ Z &= -R \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)]. \end{aligned} \quad [2]$$

Hierin zijn φ de breedtegraad en H de uurhoek met de zonnetijd $T = 12 \pm H / 15$.

De zonsdeclinatie δ is constant verondersteld, in werkelijkheid is ze variabel maar dat is verwaarloosbaar klein binnen ons werkgebied.

Het middelpunt van de halve sfeer valt samen met de oorsprong van het xyz-assenstelsel. De y-as wijst naar het noorden, de x-as het oosten en de z-as naar het nadir.

De simulatie van de zonnewijzer vanuit het zuidoosten gezien is weergegeven in fig. 2 en van bovenuit in fig. 3, met declinatie lijnen en de zonnetijden in stappen van 1 uur samen met het analemma voor het middaguur. De schaduwgever is een kogel met een diameter van 10 mm diameter die in het middelpunt van de halve sfeer (100 mm radius) is bevestigd aan een horizontale kabel. We zien de kogelschaduw op de declinatie lijn van $23,45^\circ$, op 22 juni, de zomerzonnewende, wanneer de zon in het zuiden staat om 13.52 h, het middaguur voor de locatie $51^\circ N$ en $2,15^\circ O$.

Als schaduwgever kan ook een puntstaaf gebruikt worden in plaats van een kogel.

Kenmerken

We zullen eerst aantonen dat onze declinatie lijn in een plat vlak ligt en nadien de cirkelvorm berekenen opdat een eenvoudig stencil gemaakt zou kunnen worden. We tonen aan dat drie willekeurige punten $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ en $P_3(X_3, Y_3, Z_3)$, die behoren tot een declinatie lijn en de holle sfeer, gelegen zijn in een plat vlak voorgesteld door $F_\delta(X, Y, Z)$ met de cartesische vergelijking:

$$F_\delta(X, Y, Z) = (u \cdot X + v \cdot Y + w \cdot Z + t) = 0. \quad [3]$$

De parameters u, v, w, t , worden uitgedrukt in functie van de ruimtelijke coördinaten van P_1, P_2, P_3 en weergegeven in onderstaande bijlage.

We stellen vast dat $F_\delta(X, Y, Z) = 0$ voor elk willekeurig set van drie punten behorende tot een declinatie lijn, waardoor bewezen is dat de ganse curve in het plat vlak F_δ ligt.

De declinatie lijn is ook symmetrisch ten opzichte van de y-as en $u = 0$, zodat het vlak F_δ waarin een declinatie lijn ligt evenwijdig is met de x-as en een hoek t maakt met de horizon:

$$t = (90^\circ - \varphi). \quad [4]$$

We weten dat de snijlijn van een plat vlak met een sfeer een cirkel is. Nu bewezen is dat een declinatie lijn in een plat vlak is gelegen heeft deze ook een cirkelvorm.

We bepalen de radius r_δ en het middelpunt $O(X_c, Y_c, Z_c)$ ervan met de methode van de loodrechte vlakken. We brengen in het midden van elke rechte tussen punten P_1, P_2 en P_2, P_3 een loodrecht vlak aan. Die twee vlakken snijden het vlak F_δ en de snijlijnen ervan snijden elkaar in het gezochte middelpunt. Uit verdere analyse vinden we voor de declinatie schijf de cirkelradius r_δ en het middelpunt van de cirkel de ruimtelijke coördinaten X_c, Y_c, Z_c :

$$\begin{aligned} r_\delta &= R \cdot \cos(\delta) \\ X_c &= 0 \\ Y_c &= R \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\varphi) \\ Z_c &= R \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\varphi). \end{aligned} \quad [5]$$

Ieder punt $P(X, Y, Z)$ van de declinatie lijn behoort tot een sfeer- en cirkelvorm zodat voldaan is aan:

$$\begin{aligned} (X^2 + Y^2 + Z^2) &= R^2 \\ \text{en} \\ [(X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 + (Z - Z_c)^2] &= r_\delta^2. \end{aligned} \quad [6]$$

Middagschijf

De declinatie lijn(cirkel) op het middaguur gaat door punt $P(X_{12}, Y_{12})$ en bij zonsopgang/ondergang ($h = 0$) door punt $P(\pm X_0, Y_0)$:

$$\begin{aligned} X_{12} &= R \cdot \sin(\varphi - \delta) \\ Y_{12} &= R \cdot \cos(\varphi - \delta) \\ X_0 &= R \cdot \sin(\delta) / \cos(\varphi) \\ Y_0 &= 0. \end{aligned} \quad [7]$$

Deze coördinaten (zie Tabel 1), zijn berekend in het xy-assenstelsel met de x-as naar het zuiden, zoals aangeduid op de cirkelvormige 12h-schijf in fig. 4 en dit voor het midden van de sleufopeningen (hier 2 mm breed).

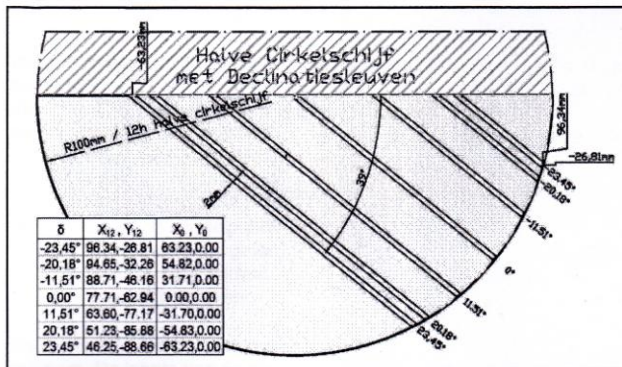


Fig. 4: Sleufpositie in 12h-schijf

| δ | X_{12}, Y_{12} | X_0, Y_0 |
|----------|------------------|--------------|
| -23,45° | 96.34, -26.81 | 63.23, 0.00 |
| -20,18° | 94.65, -32.26 | 54.82, 0.00 |
| -11,51° | 88.71, -46.16 | 31.71, 0.00 |
| 0,00° | 77.71, -62.94 | 0.00, 0.00 |
| 11,51° | 63.60, -77.17 | -31.70, 0.00 |
| 20,18° | 51.23, -85.88 | -54.83, 0.00 |
| 23,45° | 46.25, -88.66 | -63.23, 0.00 |

Tabel 1: Sleufcoördinaten 12h-schijf.

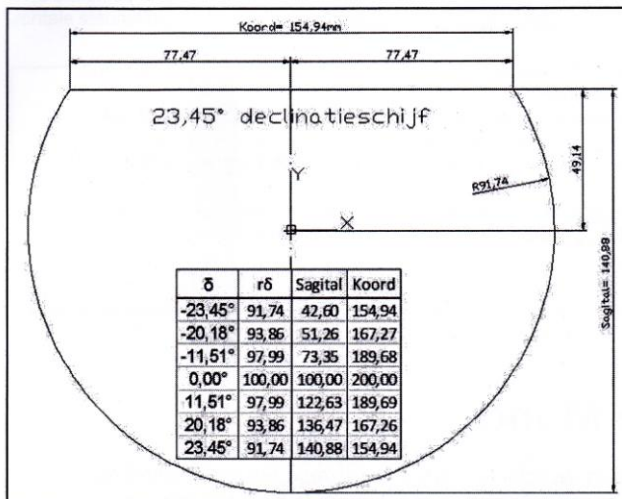


Fig. 5: Afmeting declinatieschijven.

| δ | r δ | Sagital | Koord |
|----------|------------|---------|--------|
| -23,45° | 91,74 | 42,60 | 154,94 |
| -20,18° | 93,86 | 51,26 | 167,27 |
| -11,51° | 97,99 | 73,35 | 189,68 |
| 0,00° | 100,00 | 100,00 | 200,00 |
| 11,51° | 97,99 | 122,63 | 189,69 |
| 20,18° | 93,86 | 136,47 | 167,26 |
| 23,45° | 91,74 | 140,88 | 154,94 |

Tabel 2: Afmeting declinatieschijven.

Declinatieschijf

In de sleuven van de 12h-schijf komen de cirkelsegmentvormige declinatieschijven zoals voorgesteld in fig. 5 voor een sfeerradius $R = 100$ mm en voor $\varphi = 51^\circ$ N. De afmetingen ervan zijn gegeven in Tabel 2. Deze 2 mm dikke schijven zijn passend en haaks aangebracht in de sleuven van de 12h-schijf en liggen evenwijdig aan elkaar, allen onder een scherpe hoek $t = 39^\circ$ ten opzichte van het bovenvlak van de zonnewijzer en rakend aan de holle sfeerwand. Hun bovenkant ligt in het horizontale vlak dat door het middelpunt van de sfeer gaat.

In fig. 5 zijn de koordlengte en de hoogte van het cirkelsegment berekend voor zeven declinatieschijven:

$$\text{Segmenthoogte} = \sqrt{Y_{12}^2 + (X_{12} - X_0)^2}$$

$$\text{Koordlengte} = 2 \sqrt{S \cdot (2 \cdot r_\delta - S)}$$

[8]

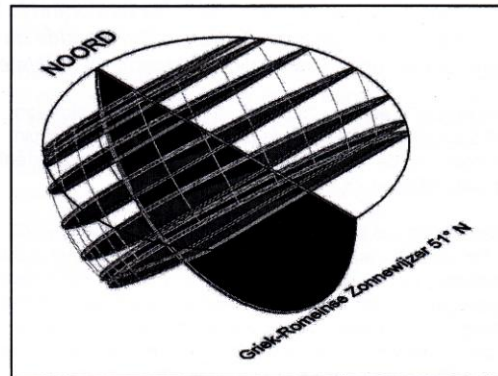


Fig. 6: Samenstelling zeven declinatieschijven in 12h-schijf.

Samenstelling

In fig. 6 (pag. 11) vinden we de samenstelling van de zeven declinatieschijven en de 12h-schijf geplaatst in de holle sfeer gezien vanuit het zuidwesten met het verticale 12h-vlak in noord/zuid-richting. Indien we nu op deze samenstelling een kleurspray aanbrengen, zal het contactoppervlak met de sfeerwand niet gekleurd zijn en zijn de declinatie lijnen dus gemarkeerd.

André Reekmans

Bijlage

Declinatievlak $F_0 = (u.X + v.Y + w.Z + t) = 0$

$$u = A.(Y_1 - Y_2) - B.(Z_1 - Z_2)$$

$$v = -A.(X_1 - X_2)$$

$$w = B.(X_1 - X_2)$$

$$t = A.[Y_1.(X_1 - X_2) - X_1.(Y_1 - Y_2)] + B.[X_1.(Z_1 - Z_2) - (X_1 - X_2)]$$

met

$$A = (Z_1 - Z_2) - [(X_1 - X_2).(Z_1 - Z_2)] / (X_1 - X_2)$$

$$B = (Y_1 - Y_2) - [(X_1 - X_2).(Y_1 - Y_2)] / (X_1 - X_2).$$

Referenties

- ¹ Ortwin Feustel, *Mathematical Analysis Of Hollow Sphere And Hollow Cone Sundials With Pin Gnomon And Hole Gnomon - Part 1, The Compendium*, September 2014, p. 23-30.
- ² Willy Leenders: De zonnwijzer die de kunstenaar heeft gemaakt berust op een eeuwenoud concept dat terug te vinden is in zogenaamde hemisferische - van het Grieks hēmi (half) + sphaira (bal, bol, globe) - zonnwijzers, in China en Korea met uurlijnen en datumlijnen maar ook in de Griekse en Romeinse 'scaphè' - Grieks voor 'uitgehold' - met alleen uurlijnen.
- ³ Deze zonnwijzer, 'Hemelspiegel' genaamd, is van de kunstenaar Jelle Andriessse en uitgevoerd in zwart graniet met als afmetingen 85 x 85 x 25 cm. Een pdf-bestand over de plaatsing ervan kan gedownload worden op www.geldermalsen.nl.