Nogmaals het Zutphense kwadrant

Cirkelbogen als uurlijnen

"Tot slot moesten de uurlijnen worden getekend. Daarvoor waren opnieuw tabellen nodig, in dit geval van de zonshoogte op drie specifieke tijdstippen: de twee eveningen, de zomerzonnewende en de winterzonnewende óf de laatste datum waarop de zon zich op een bepaald uur nog net boven de horizon bevond. De maker ging er nu van uit dat de uurlijn een cirkelboog is door deze drie punten." [1]

Hierna volgt de methode om deze zonnetijdcurven te vervangen door cirkelbogen.

Berekening zonnetijdcurven

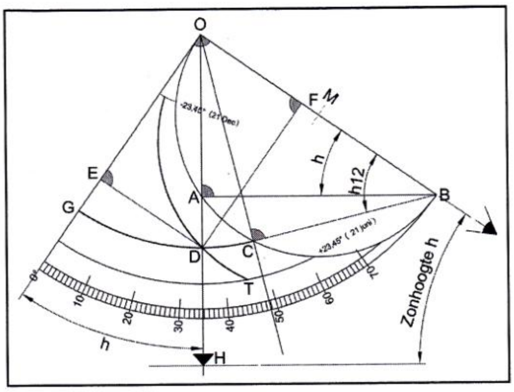

Fig.1: Kwadrantvoorstelling

Voor het berekenen van de zonnetijdcurven zijn volgende meetkundige eigenschappen toegepast:

1. De hoek ingeschreven in een halve cirkel is rechthoekig, zoals < A in Fig.1.
2. Hoeken waarvan de benen loodrecht op elkaar staan zijn gelijk, zoals <B in driehoek AOB en <O in driehoek EOD daar OB ⊥ OE en AB ⊥ OD.
3. Rechte AB is evenwijdig met de horizon zodat <B gelijk is aan de zonshoogte h.

We veronderstellen ook:

4. Dat de zonsdeclinatie δ constant is tussen zonsopgang en zonsondergang.
   In Fig.1 is dit aangegeven door cirkelboog CG met straal OC en middelpunt O, het kwadrant centrum. Deze cirkelboog vertrekt in C vanaf de 12h-halve cirkel en eindigt in G wanneer de zon boven de horizon gaat h = 0°.
5. Dat de zonshoogte h12 op het middaguur gekend is via tabellen of berekening.

We zoeken nu de ligging van het punt D op de zonnetijdcurve T.

Punt D is het snijpunt van de hoogteloodlijn OH met de zonsdeclinatiecirkel CG.

We berekenen de lengte van lijnstuk OE en OF:

- in driehoek EOD is
  OE = OD x Sin (h)
  OF = ED = OD x Cos (h).
- in driehoek COB, met OB als kwadrantdiameter, is de zonsdeclinatiecirkelradius
  OC = OD = OB x Sin (h_{12}):
  OE = OB x Sin (h_{12}) x Sin (h)
  OF = OB x Sin (h_{12}) x Cos (h)
  met h12 = 90° - φ + $δ_{12}$
  φ = breedtegraad
  h = zonshoogte = bgsin [sin (δ) x sin (φ) + cos (δ) x cos (φ) x cos (H)]
  met H = uurhoek = (T24-12) x 15° en T24 = zonnetijd 24h-schaal

Op 17 april is om 9 h de zonshoogte h = 35°en op het middaguur de zonsdeclinatie δ1 2 = +10,65° en hoogte h_{12} = 48,65° weergegeven in Fig.1.

Deze gegevens toegepast op bovenstaande vergelijkingen voor OB = 60mm, dan is de ligging van punt D op de 9h-curve bekend:

OE = 25,84 mm
OF = 36,90 mm.

Op gelijkaardige wijze berekenen we deze zonnetijdcurven 12h - 4h(20h) voor elke dag, zie Fig.2.

Deze zonsdeclinatiecirkels hebben als radius OC = 60 mm x Sin (h_{12}) voor Zutphen φ = 52° is de zonshoogte op het middaguur h12 = 38° + $δ_{12}$.

Deze zonsdeclinaties $δ_{12}$ zijn berekend met de formules uit [2].

Rechts van de 12h-cirkel zijn de twaalf gebruikelijke zodiac-zonsdeclinaties met hun overeenkomstige datum vermeld en aan de linkerkant van het kwadrant de maanden.

De zonsdeclinatiecirkels worden doorlopen vanaf zonsopgang tot 12h middag en terug tot zonsondergang.

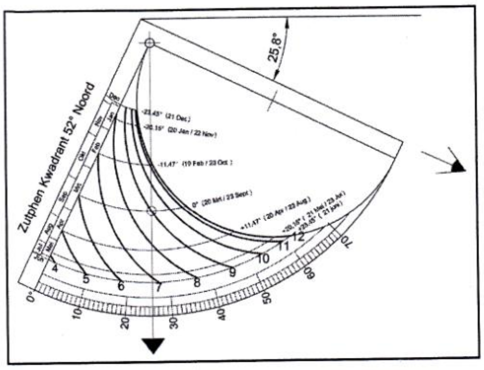

Fig.2: Kwadrantinstelling op 20 maart bij 25,8° zonshoogte.

Cirkel door drie punten

De negen zonnetijdcurven uit Fig.2 zijn het resultaat van de zonsdeclinatie-berekeningen om 12h middag voor iedere dag van een jaar. We zoeken een cirkelboog die elk van de curven kan vervangen met voldoende nauwkeurigheid. We bepalen de formule van de cirkel die door drie willekeurige punten gaat met cirkelstraal R en centerpunt-coördinaten (a, b). Slechts één cirkel kan door drie punten gaan en deze punten zijn het snijpunt van de zonnetijdcurve en drie cirkels met zonsdeclinatie δ_1, δ_2, δ_3. De coördinaten van deze snijpunten zijn (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) en (X_3, Y_3) - zie Fig.3.

$$R = \sqrt{(X_1 - a)^2 + (Y_1 - b)^2}$$

Hierin zijn:
a = (A x F - B x D) / (D x E - F x C)
b = (A x E - B x C) / (D x E - F x C)
A = (X12 + Y12) - (X22 + Y22)
B = (X12 + Y12) - (X32 + Y32)
C = 2 x (X1 - X2)
D = 2 x (Y1 - Y2)
E = 2 x (X1 - X3)
F = 2 x (Y1 - Y3)

Zonnetijdcurven vervangen door cirkelbogen

We berekenen voor elke dag de afwijking (Δ_y) tussen de zonnetijdcurve en de cirkel die door drie punten gaat gelegen op deze zonnetijdcurve en behorende tot de declinatiecirkel δ_1, δ_2, δ_3.
Deze zijn initieel:
δ_1 = +23,45°
δ_3 = -23,45° of δ_3 @h = 0°
$\delta_2 = (\delta_1+\delta_3)/2$.

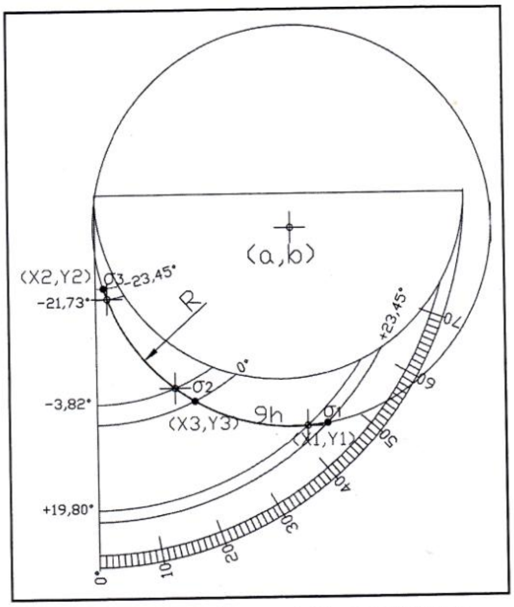

Fig.3: Cirkel door 3 punten van de 9h zonnetijdcurve

Met behulp van een optimalisatieroutine werd de kwadratische som $\sum \Delta_y^2$ geminimaliseerd door δ_1, δ_2, δ_3 te veranderen.

Als voorbeeld nemen we de 9h-zonnetijdcurve uit Fig.3, waar we na optimalisatie bekomen voor δ_1 = +19,80°, δ_2 = -3,82°, δ_3= -21,73° en de radius R = 32,29 mm met centerpunt (a,b), a = 32,06 mm, b = 5,18 mm met als resultaat $\sum \Delta_y^2$ = 0,22 en 3 x Std = 0,073mm. [3]

De resultaten voor de negen zonnetijdcurven zijn weergegeven in Tabel 1 op pag. 16.

Van alle zonnetijdcurven heeft de 8h/16h-curve de grootste positieve en negatieve afwijking Δ_y = +0,12mm / -0,069mm.

Men kan dus stellen dat een cirkelboog iedere zonnetijdcurve nauwkeurig kan vervangen.
Met de nu gekende cirkelradius en -centerpunt kunnen op eenvoudige wijze alle zonnetijdcurven van het Zutphense kwadrant geconstrueerd worden en voorgesteld in Fig.4 op pag. 16.
Op deze figuur zijn enkel 12h-4h aangeduid.
Aangezien de hoogte van de zon dezelfde is een uur voor als een uur na zonsdoorgang van de lokale meridiaan zijn de namiddaguren, die van 12h-20h, dan ook gelijklopend.

Zonnetijd	12h	11h/13h	10h/14h	9h/15h	8h/16h	7h/17h	6h/18h	5h/19h	4h/20h
δ_1(°)	23,45	20,28	20,38	19,80	19,64	21,33	22,12	22,70	23,33
δ_2(°)	0,00	-1,07	-2,23	-3,82	-2,22	4,53	11,70	17,76	22,50
δ_3(°)	-23,45	-21,14	-21,31	-21,73	-18,95	-8,87	2,15	12,53	21,53
X-center (mm)	30,00	30,37	31,25	32,06	31,98	29,87	25,78	20,71	15,88
Y-center (mm)	0,00	0,51	2,19	5,18	9,54	15,38	21,47	26,25	28,96
Radius (mm)	30,00	30,37	31,27	32,29	32,86	31,96	30,04	28,33	27,66

Tabel 1. Geoptimaliseerde zonnetijdcurve 12h-4h/20h vervangen door een cirkel door de punten δ_1, δ_2, δ_3

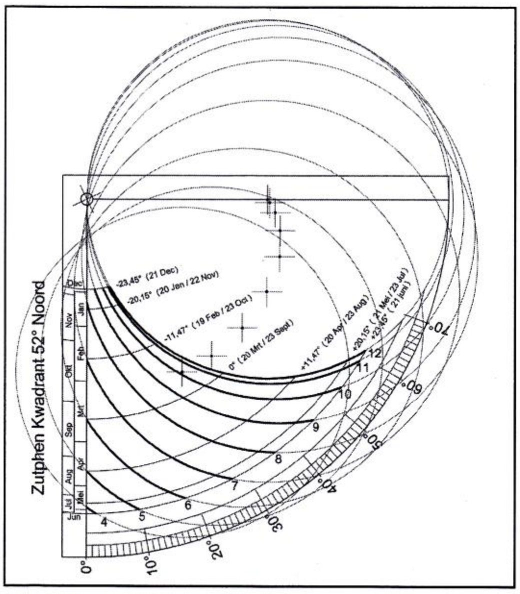

Fig. 4: Zonnetijdcurven 12h-4h vervangen door cirkelboog

Lengte- en zomertijdcorrectie toegepast op zonnetijdcurven

De tijdschaal van het Zutphense kwadrant is in ware plaatselijke tijd of zonnetijd.
Stel dat we op de zonnetijd een lengtecorrectie toepassen = (15° - lengtegraad)/15°/h en 1h extra bij zomertijd. Voor Zutphen is de lengtegraad = 6,20° en de lengtecorrectie = +35^m 12^s plus +60^m en de totale correctie = 1^h 35^m 12^s.

In Fig.5 zijn de zonnetijdcurven met lengtecorrectie voorgesteld met de voormiddagcurven van 6^h tot 13^h 35^m en de namiddagcurven van 13^h 35^m tot 21^h voor de voor- en de achterkant van het kwadrant. Willen we de afgelezen tijd vergelijken met onze kloktijd, dan moet de tijdvereffening [4] nog bijgeteld worden.

Zoals uiteengezet in §3 is een zonnetijdscurve nauwkeurig te vervangen door een cirkel, wat ook geldt voor deze uit Fig.5 op pag. 17.

In Tabel 2 en 3 vindt men de radius en center van deze gecorrigeerde zonnetijdcurven uit Fig.5.

Gecorrigeerde zonnetijd	13h35s	13h	12h	11h	10h	9h	8h	7h	6h
X-center (mm)	30,00	30,13	30,85	31,73	32,04	30,85	27,62	22,86	17,80
Y-center (mm)	0	1,35	1,35	3,83	7,65	12,92	18,99	24,45	28,08
Radius (mm)	30,00	30,85	30,85	31,82	32,59	32,37	30,90	28,99	27,81

Tabel 2. Gecorrigeerde AM-zonnetijdcurven vervanging door een cirkel.

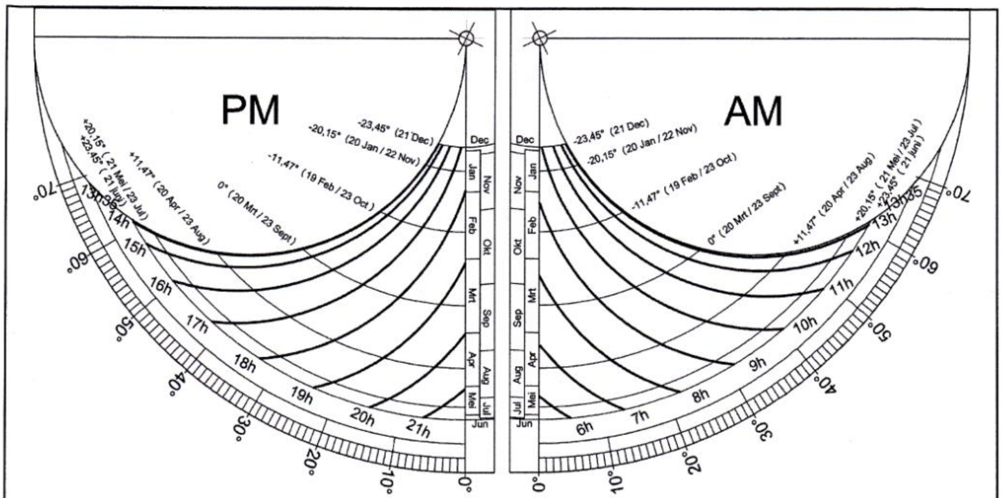

Fig.5: Kwadrant met gecorrigeerde zonnetijdcurven.

Gecorrigeerde zonnetijd	*13h35s*	*14h*	*15h*	*16h*	*17h*	*18h*	*19h*	*20h*	*21h*
X-center (mm)	*30,00*	*30,07*	*30,69*	*31,59*	*32,06*	*31,20*	*28,32*	*23,74*	*18,64*
Y-center (mm)	*0*	*0,09*	*1,06*	*3,30*	*6,91*	*11,90*	*17,94*	*23,61*	*27,60*
Radius (mm)	*30,00*	*30,07*	*30,70*	*31,66*	*32,49*	*32,50*	*31,22*	*29,30*	*27,93*

Tabel 3. Gecorrigeerde PM-zonnetijdcurvenvervanging door een cirkel.

André Reekmans

Referenties

1. Davis J., Het Zutphense kwadrant (deel 2), in Zonnetijdingen nr.71, p. 4.
2. Reekmans A., Een stenen ringzonnewijzer, in Zonnetijdingen nr. 67, p. 15.
3. Std of de standaardafwijking is gebruikt om de spreiding van een getallenreeks aan te geven, zie http://nl.wikipedia.org/wiki/Standaardafwijking.
4. Tijdvereffening, zie http://www.wijzerweb.be/kloktijdzonnetijd.html en http://nl.wikipedia.org/wiki/Tijdsvereffening.